# 概率DP

成都七中 叶诗富

概念：

概率DP用于解决概率问题与期望问题。

一般情况下，解决概率问题需要顺序循环，而解决期望问题使用逆序循环，如果定义的状态转移方程存在后效性问题，还需要用到高斯消元来优化

# Codeforces 148 D Bag of mice

袋子里有w只白鼠和b只黑鼠，公主和龙轮流从袋子里抓老鼠。谁先抓到白色老鼠谁就赢，如果袋子里没有老鼠了并且没有谁抓到白色老鼠，那么算龙赢。公主每次抓一只老鼠，龙每次抓完一只老鼠之后会有一只老鼠跑出来。每次抓的老鼠和跑出来的老鼠都是随机的。公主先抓。问公主赢的概率。

## 分析

f(i, j)表示袋子里有i只白，j只黑，公主获胜的概率。

$$f(i,j)=\text{sum}\left\{\begin{matrix}\frac{i}{i+j}\\ \frac{j}{i+j}\cdot\frac{j-1}{i+j-1}\cdot\frac{j-2}{i+j-2}\cdot f(i,j-3)\\ \frac{j}{i+j}\cdot\frac{j-1}{i+j-1}\cdot\frac{i}{i+j-2}\cdot f(i-1,j-2)\end{matrix}\right\}$$

边界： $f(0,j)=0,f(i,0)=1;$

# POJ2096 Collecting Bugs

一个软件有s个子系统，会产生n种bug。某人一天发现一个bug，这个bug属于某种bug分类，也属于某个子系统。每个bug属于某个子系统的概率是$\frac{1}{s}$，属于某种bug分类的概率是$\frac{1}{n}$。求发现n种bug，且s个子系统都找到bug的期望天数。

## 分析

f(i, j)为已经找到i种bug分类，j个子系统的bug，达到目标状态的期望天数。

$$f(i,j)=\frac{i}{s}\cdot\frac{j}{n}\cdot f(i,j)+\frac{i}{s}\cdot\frac{n-j}{n}\cdot f(i,j+1)+\frac{s-i}{s}\cdot\frac{j}{n}\cdot f(i+1,j)+\frac{s-i}{s}\cdot\frac{n-j}{n}\cdot f(i+1,j+1)+1$$

边界：$f(s,n)=0$;

# 换教室1660

牛牛要上$n$个时间段的课，第$i$个时间段在$c_i$号教室，可以申请换到$d_i$号教室，申请成功的概率为$p_i$，至多可以申请$m$节课进行交换。第$i$个时间段的课上完后要走到第$i+1$个时间段的教室，给出一张图$v$个教室$e$条路，移动会消耗体力，申请哪几门课程可以使他因在教室间移动耗费的体力值的总和的期望值最小，也就是求出最小的期望路程和。

## 分析

$f(i, j, 0/1)$表示第$i$个时段，前面申请了$j$次的期望路程长度，0表示第$i$次没申请，1表示第$i$次申请了。

$$f(i,j,0)=\min\{f(i-1,j,0)+dis[c_{i-1}][c_i], f(i-1,j,1)+p_{i-1}\cdot dis[d_{i-1}][c_i]+(1-p_{i-1})\cdot dis[c_{i-1}][c_i]\}$$

$$f(i,j,1)=min\{ f(i-1,j-1,0)+p_i\cdot dis[c_{i-1}][c_i]+(1-p_i)\cdot dis[c_{i-1}][d_i], f(i-1,j-1,1)+p_i p_{i-1}\cdot dis[d_{i-1}][d_i]+(1-p_{i-1})\cdot p_i\cdot dis[c_i][d_i]+(1-p_i)\cdot p_{i-1} dis[d_{i-1}][c_i]+(1-p_i)\cdot(1-p_{i-1}) dis[c_{i-1}][c_i]\}$$

# CodeForces 24 D Broken robot

给出一个 $n \times m$ 的矩阵区域，一个机器人初始在第 $x$ 行第 $y$ 列，每一步机器人会等概率地选择停在原地，左移一步，右移一步，下移一步，如果机器人在边界则不会往区域外移动，问机器人到达最后一行的期望步数。

# 分析

设$f_{i,j}$表示从i, j走到目标位置的期望步数

$$f_{i,1}=\frac{1}{3}\cdot\left(f_{i+1,1}+f_{i,2}+f_{i,1}\right)+1$$

$$f_{i,j}=\frac{1}{4}\cdot\left(f_{i,j}+f_{i,j-1}+f_{i,j+1}+f_{i+1,j}\right)+1$$

$$f_{i,m}=\frac{1}{3}\cdot\left(f_{i,m}+f_{i,m-1}+f_{i+1,m}\right)+1$$

# 总结：

解决概率DP的一般方法：

1. 顺推求概率
2. 逆推求期望
3. 有后效性的高斯消元

# 推荐题目

CodeForces 148 D Bag of mice
POJ3071 Football
CodeForces 768 D Jon and Orbs
POJ2096 Collecting Bugs
HDU3853 LOOPS
HDU4035 Maze
换教室 1660
奖励关 407
CodeForce 24 D Broken robot
HDU Time Travel
HNOI2013 游走

# 谢谢大家！